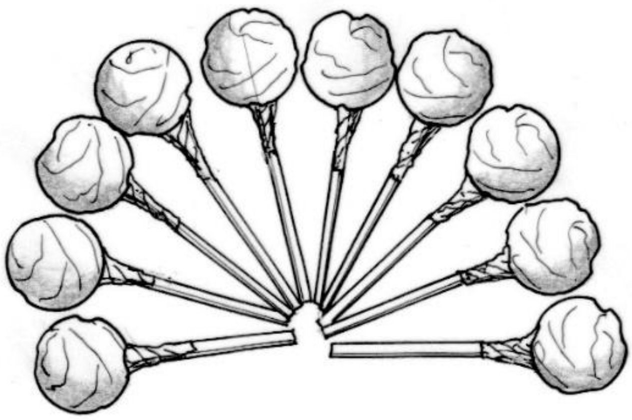
Exercice 1 LV – *SÛRE DE GAGNER ?* – 7 points –
Thème : Algorithmique et logique. Stratégie. **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Stratégie, arithmétique, division euclidienne, multiple.

<u>Énoncé</u>



Isabelle et Théo jouent avec dix sucettes sur une table. À tour de rôle, chacun doit en enlever une, deux ou trois. La personne qui peut prendre la dernière sucette a gagné.
Isabelle commence. Après un certain nombre de parties, c'est toujours elle qui gagne.

Jouer à ce jeu plusieurs fois et trouver la stratégie qui a permis à Isabelle de gagner à chaque fois. Expliquer.

Compétences : chercher, raisonner, modéliser, communiquer.
Capacités : émettre une hypothèse, tester, traduire en langue mathématiques une situation réelle, argumenter et expliquer la démarche.
Tâches de l'élève : Raisonner par essai-réajustement, expliquer et rédiger la démarche en langue étrangère.

<u>Eléments de correction et solution :</u>

S'il reste quatre sucettes :
- Si Théo en prend 1, Isabelle en prendra 3,
- Si Théo en prend 2, Isabelle en prendra 2,
- Si Théo en prend 3, Isabelle en prendra 1,

Dans tous les cas Isabelle va gagner en prenant la dernière sucette.
Il faut donc qu'Isabelle laisse à Théo un nombre de sucettes multiple de 4, soit en prendre deux au début de la partie, et compenser chaque prise de l'adversaire par le complément à 4.
Stratégie :
Isabelle doit prendre deux sucettes au début de la partie.
Isabelle doit toujours s'arranger pour laisser à Théo un nombre de sucettes multiple de 4.

Remarque pour les enseignants :
Il est fondamental de faire jouer les élèves à ce jeu en classe pour dégager une stratégie.

Une rédaction possible :

Pour qu'Isabelle soit certaine de gagner, elle doit pouvoir choisir de commencer.
En effet, au départ il y a 10 sucettes.

1er coup :
Isabelle commence et prend 2 sucettes : il en reste donc **8**

2e et 3e coups :
Si Théo prend 1 sucette, Isabelle doit en prendre 3 : il en reste **4**
Si Théo prend 2 sucettes, Isabelle doit en prendre 2 : il en reste **4**
Si Théo prend 3 sucettes, Isabelle doit en prendre 1 : il en reste **4**

4e et 5e coups :
Si Théo prend 1 sucette, Isabelle prend les 3 dernières et **gagne**
Si Théo prend 2 sucettes, Isabelle prend les 2 dernières et **gagne**
Si Théo prend 3 sucettes, Isabelle prend la dernière et **gagne**

D'où la stratégie : **Isabelle commence et s'arrange pour laisser à Théo un nombre de sucettes multiple de 4**

Si Théo commence et qu'il connaît la stratégie Isabelle n'est pas certaine de gagner !

Barème proposé :

4 points pour l'explication de la stratégie

3 points pour la qualité de la langue

Pour aller plus loin…

Le grand didacticien Guy Brousseau de l'académie de Bordeaux a imaginé le jeu de la course à 20 qu'il a proposé à des élèves de l'école élémentaire.
Deux joueurs se font face avec une feuille de papier pour noter les étapes du jeu.
Cette feuille permettra une analyse des jeux.

Le jeu commence à 0.
À tour de rôle chaque joueur ajoute 1 ou 2. Celui qui dit 20 a gagné.
Une partie se déroule très vite et suscite rapidement une réflexion.

Assez vite, les élèves constatent que celui qui dit 17 a gagné puisque l'adversaire ne peut que dire 18 ou 19. La course à 20 devient la course à 17. Avec le même raisonnement, on trouve qu'il faut dire 14, 11, 8, 5 et enfin 2. Donc celui qui commence en disant 2 a gagné.

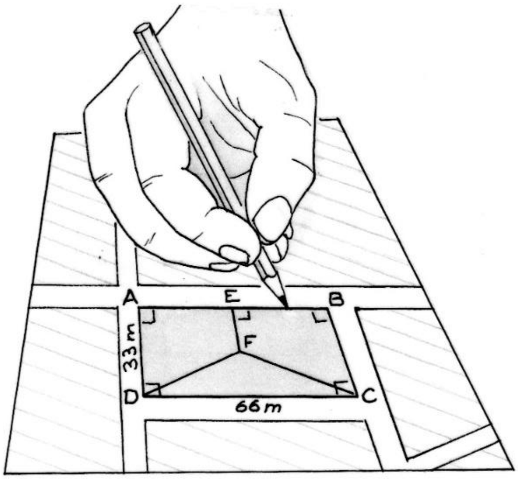
En résumé, à 20 on enlève 3 autant de fois que possible et le nombre 2 est le reste de la division de 20 par 3. Nous sommes donc dans la situation de division telle qu'Euclide l'avait construite.
Au collège ce jeu permet une belle généralisation en fixant un nombre cible et un pas, le nombre entier suivant le plus grand nombre que l'on peut ajouter. Ici 20 est la cible, comme on peut ajouter 1 ou 2, le pas est 3. Celui qui commence par le reste de la division est certain de gagner. Si le reste est 0, il faut laisser l'adversaire commencer.

Pour l'exercice « sûre de gagner », la cible est 10 et le pas 4 (= 3+ 1) or 10 = 4 x 2 + 2.
Pour gagner, il faut commencer et dire 2.

Brousseau a imaginé une procédure didactique en classe pour faire réfléchir les élèves sur la stratégie. Cette belle animation d'une heure est d'une très grande richesse, tant du point de vue didactique que de la gestion du groupe classe.
Pour tout renseignement complémentaire sur cette activité, s'adresser à l'Équipe de Conception car le document de Guy Brousseau n'est plus disponible.

Exercice 2– *PLAN TER* – 5 points –
Thème : Grandeurs et mesures. Configuration du plan, aire. **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Aire d'un triangle, hauteur d'un triangle, aire d'un rectangle, aire d'un trapèze.

Énoncé



Un terrain rectangulaire, de longueur 66 m et de largeur 33 m, est partagé en trois parcelles polygonales de même aire. Les droites (EF) et (AB) sont perpendiculaires.

Calculer la longueur EF.

Compétences : Chercher, calculer, raisonner.
Capacités : Résoudre un problème impliquant des aires, utiliser les propriétés d'une figure pour calculer des grandeurs géométriques.
Tâches de l'élève : Calculer des aires, calculer la hauteur d'un triangle connaissant son aire.

Éléments de correction et solution :

Les deux trapèzes ont les mêmes bases et la même aire donc le point E est au milieu de [AB].
Ainsi AE = EB.

Les aires de chacun des deux trapèzes rectangles et celle du triangle isocèle sont égales.

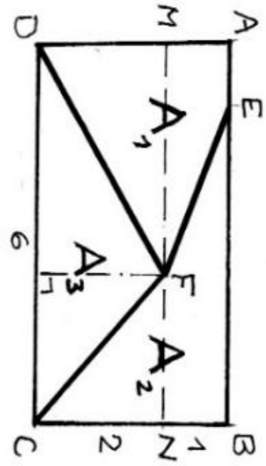
$$\frac{(AD + EF) \times AE}{2} = \frac{DC \times (AD - EF)}{2}$$

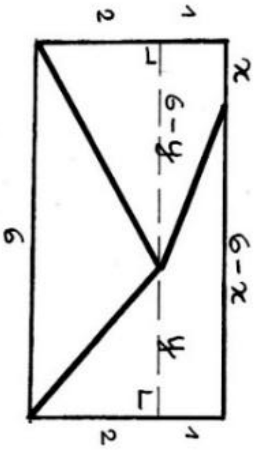
On obtient l'équation suivante :
$(33 + EF) \times 33 = 66 \times (33 - EF)$
$(33 + EF) = 2 \times (33 - EF)$
$3EF = 33$ soit $EF = 11$ m

La longueur EF vaut 11 m.

Barème proposé :
2 points pour « Le point E se trouve au milieu du segment [AB] » avec explication.
3 points pour le calcul et la solution 11 cm.

Généralisation :
On se propose de partager le rectangle en trois polygones de même aire avec un sommet commun.
Cette fois-ci sans les perpendiculaires.





Aire ABCD = 6×3 = 18 cm²

Aire A_1 = Aire A_2 = Aire A_3 = 18 : 3

Aire A_3 = $\frac{18}{3}$ = 6 cm²

$= \frac{6 \times 2}{2}$ ← constant !

donc le point F se déplace sur le segment [MN]

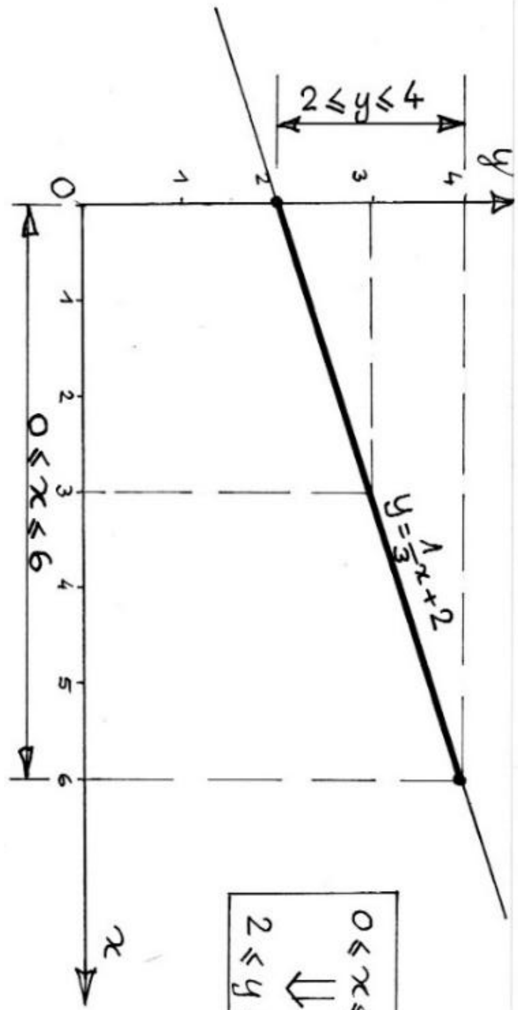
On décompose chaque quadrilatère A_1 et A_2 en : un triangle rectangle et un trapèze

$$A_1 = \frac{2\times(6-y)}{2} + 1\times\frac{x+6-y}{2} = \frac{12-2y+x+6-y}{2} = \frac{x-3y+18}{2}$$

$$A_2 = 2\times\frac{y}{2} + 1\times\frac{6-x+y}{2} = \frac{2y+6-x+y}{2} = \frac{3y-x+6}{2}$$

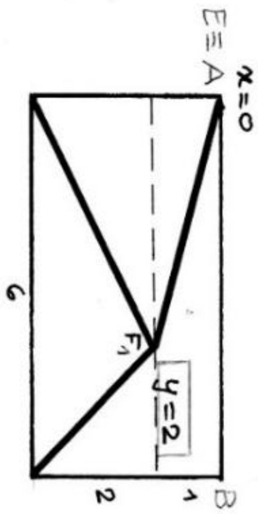
$A_1 = A_2$ d'où $3y - x + 6 = x - 3y + 18$ ou $6y = 2x + 12$

d'où $\boxed{y = \frac{1}{3}x + 2}$

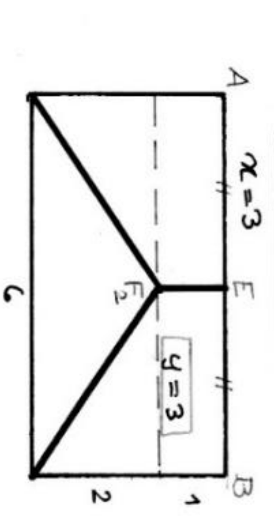


$0 \leqslant x \leqslant 6$
$\Downarrow$
$2 \leqslant y \leqslant 4$

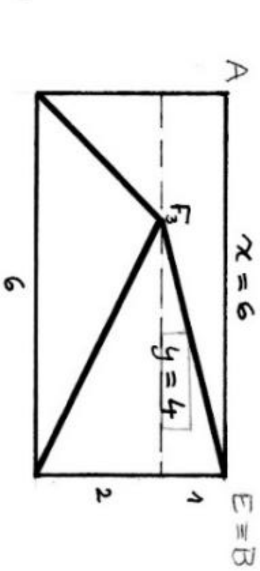
Lorsque E se déplace sur le segment [AB] voici des Positions particulières



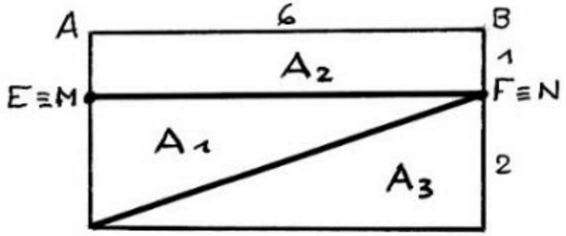
E est milieu de AB



x=y donc (EF) ⊥ (AB)

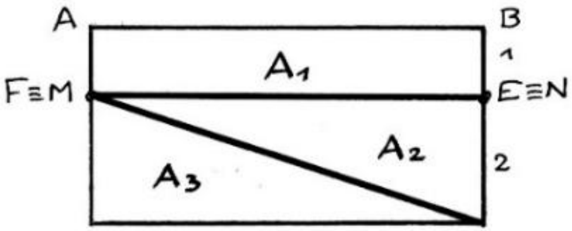


2.



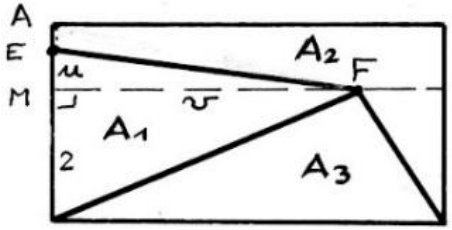
<u>Lorsque F est en N, le point E</u>
<u>est en M</u>, de sorte que :

$$A_1 = A_2 = A_3 = 6\,cm^2$$



<u>Lorsque F est en M, le point E</u>
<u>est en N</u>, de sorte que :

$$A_1 = A_2 = A_3 = 6\,cm^2$$

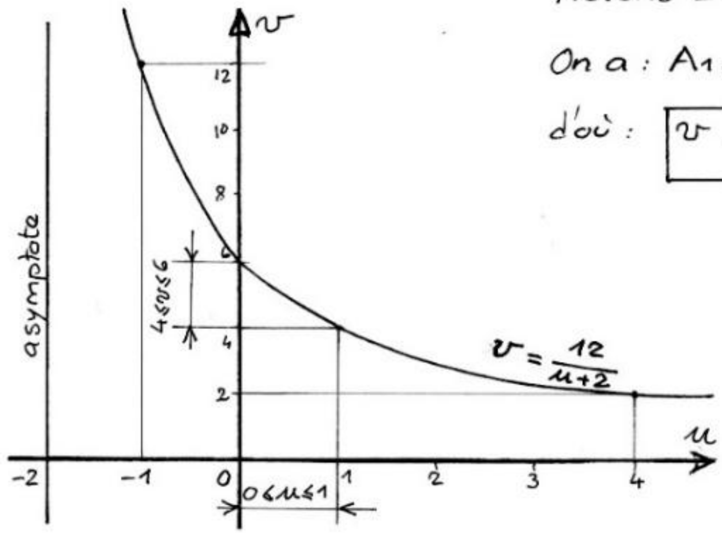


<u>Lorsque E est entre A et M</u>, sur le segment [AM]

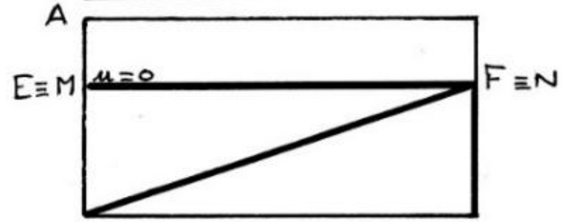
Notons $EM = u$ et $MF = v$

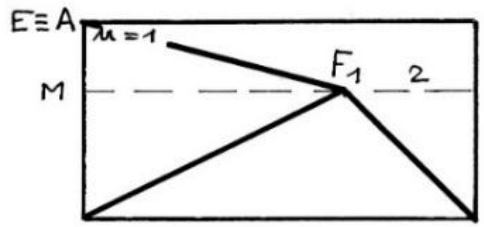
On a : $A_1 = \dfrac{(u+2)\times v}{2} = 6$

d'où : $\boxed{v = \dfrac{12}{u+2}}$ avec $\boxed{\begin{matrix} 0 \leq u \leq 1 \\ \Downarrow \\ 4 \leq v \leq 6 \end{matrix}}$

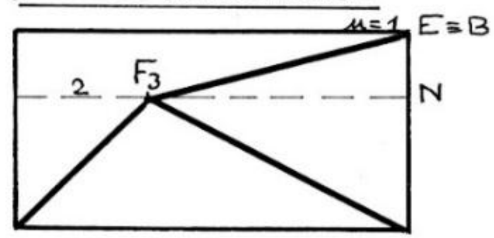


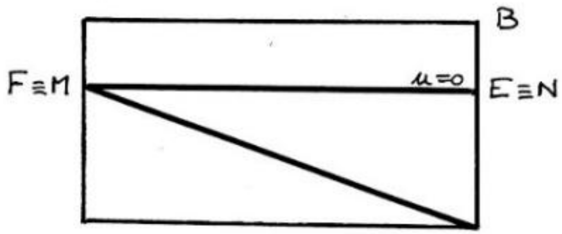
<u>Lorsque E se déplace</u>
<u>de M en A</u> voici deux
<u>positions particulières</u> :





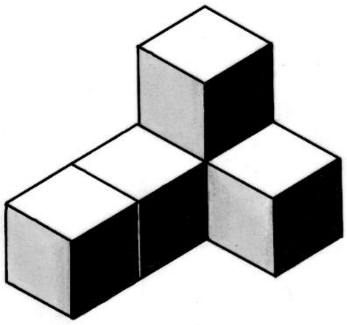
De même, <u>lorsque E se</u>
<u>déplace de B en N</u>, voici deux
<u>positions particulières</u> :





Exercice 3 – *ILLUSIONS* – 7 points –
Thème : Géométrie. Configuration de l'espace et du plan. **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Solide, cube, représentation en perspective, tracé, espace.

<u>Énoncé</u>



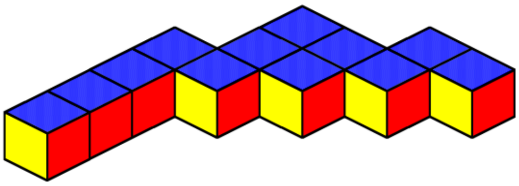
Le dessin présente un assemblage de onze losanges accolés (quatre blancs, quatre noirs et trois gris), qui constitue une vue en perspective de quatre cubes visibles.
On a colorié de la même couleur tous les losanges orientés de la même manière.

De la même façon, proposer un assemblage composé uniquement de vingt-quatre losanges accolés qui représente douze cubes visibles en perspective avec douze losanges bleus, sept losanges rouges et cinq losanges jaunes.
NB : Un papier à maillage isométrique est fourni en annexe.

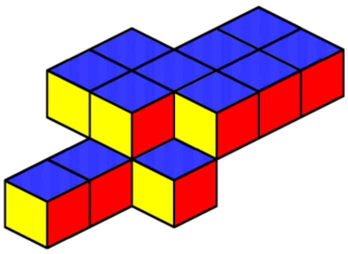
Compétences : Chercher, représenter.
Capacités : Vision dans l'espace, utiliser, produire et mettre en relation des représentations de solides et de situations spatiales.
Tâches de l'élève : Tracer une figure en perspective, respect d'une contrainte, raisonner par essai-réajustement, coloriage.

<u>Éléments de correction et solution :</u>

Il existe de très nombreuses solutions.
Voici une solution à « un niveau » :



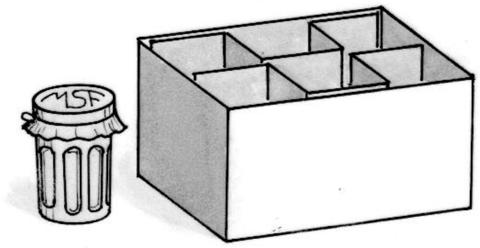
Une solution à « deux niveaux » :

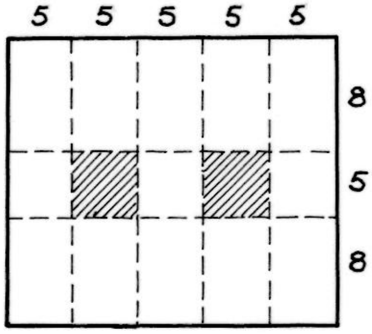


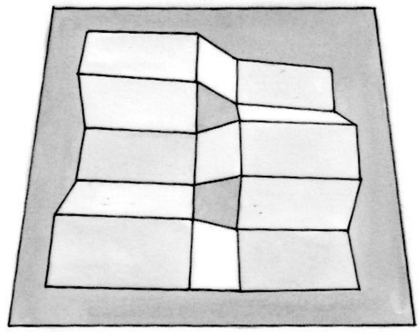
Barème proposé : 7 points pour un assemblage qui répond aux exigences. Pour valoriser les traces de recherche : à l'appréciation du correcteur.

Exercice 4 – *CONFITURES CONFINÉES* – 5 points –
Thème : Géométrie. Configuration de l’espace et du plan. **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Solide, patron, pavé droit, calcul.

Énoncé







Pour livrer ses pots de confiture un producteur a demandé de fabriquer un cloisonnement en carton, facilement pliable, pour caler les pots dans une boîte afin qu’ils ne se cognent pas.
Ce cloisonnement sur la figure est formé de dix rectangles de dimensions 8 cm sur 5 cm et de trois carrés de 5 cm de côté. Les deux carrés hachurés ont été supprimés.
Le pliage est réalisé comme sur la figure et placé dans la boîte.

Fabriquer ce cloisonnement et cette boîte.
Donner les dimensions de la boîte.
Présenter à votre professeur la boîte avec le cloisonnement à l’intérieur.

Compétences : Chercher, représenter, calculer.
Capacités : Vision dans l’espace, utiliser, produire et mettre en relation des représentations de solides et de situations spatiales, calculer.
Tâches de l’élève : Tracé d’un patron, découpage, pliage, manipulation, calcul.

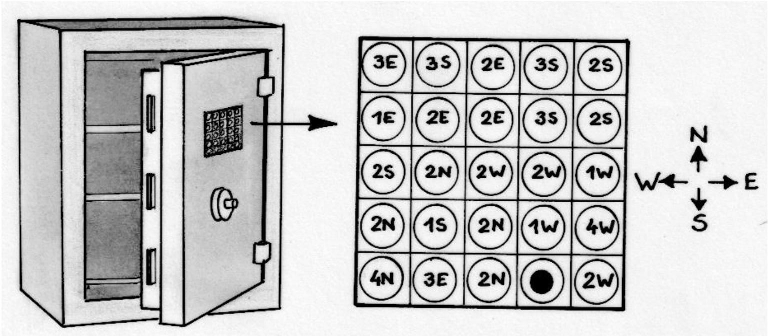
Éléments de correction et solution :

En suivant les instructions, on réalise le cartonnage à placer dans la boite.
La boite a les dimensions suivantes : longueur 15 cm, largeur 10 cm et hauteur 8 cm.
Elle permet de mettre six petits pots.

Barème proposé :
2,5 points pour la fabrication du cloisonnement. 1,5 points pour les dimensions de la boîte (0,5 point pour chaque longueur) 1 point pour le soin.

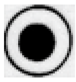
Exercice 5 – *LA GUERRE DES BOUTONS* – 7 points –
Thème : Algorithme et logique. Stratégie. **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Stratégie, orientation dans le plan, déplacements dans le plan, points cardinaux.

<u>Énoncé</u>



Le coffre-fort ci-dessus a une fermeture qui s’ouvre seulement quand tous les boutons ont été poussés dans le bon ordre. Chaque bouton a une instruction qui dit où aller.
Par exemple, 4N signifie « se déplacer de 4 cases vers le Nord ». La lettre S pour le Sud, le W pour l’Ouest et E pour l’Est.
Le dernier bouton à presser avant l’ouverture du coffre est indiqué par un disque noir

Retrouver le premier bouton pressé.

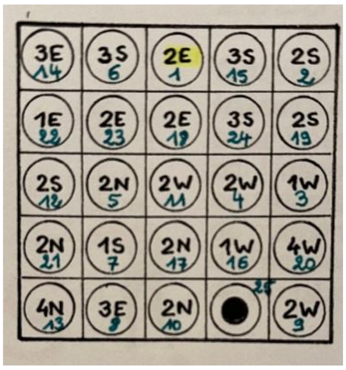


Compétences : Chercher.	
Capacités : Extraire des informations utiles et les organiser, tester.	
Tâches de l’élève : Se repérer et se déplacer selon les points cardinaux, respect d’une contrainte.	

<u>Éléments de correction et solution :</u>

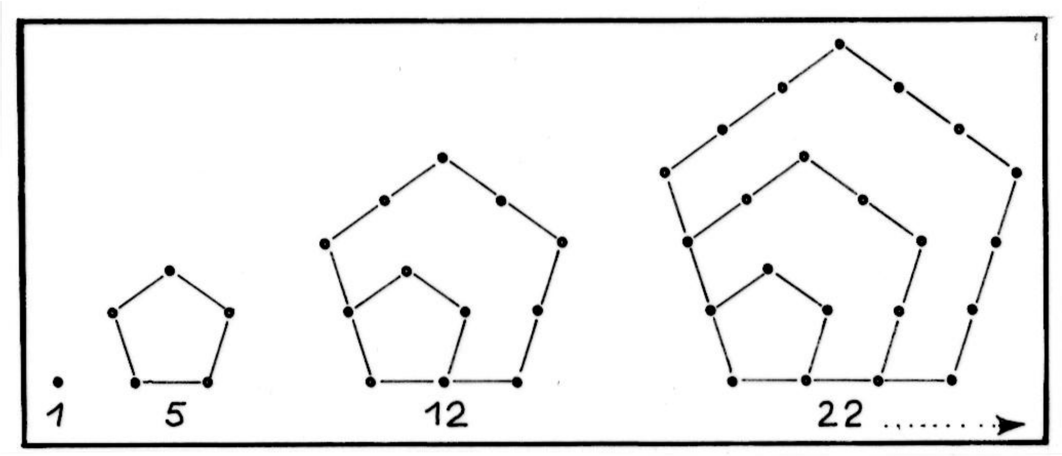
Dans la ligne du point noir, aucune instruction ne permet d’accéder au dernier bouton. Mais dans sa colonne, le bouton 3S le permet. La même recherche en sens inverse depuis ce bouton nous donne l’ordre cherché.

Les numéros verts sur le tableau ci-dessous indiquent l’ordre des boutons à presser, le bouton surligné en jaune est le premier pressé.



Le premier bouton pressé est le 2E de la première ligne.

Barème proposé :
7 points pour le bouton correct. Si seulement une partie du chemin a été reconstruite correctement, à l‘appréciation du correcteur



Exercice 6 – *POLYGONAUX* – 5 points –
Thème : Géométrie, nombres et calculs. Configuration du plan, pattern. **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Pentagone, hexagone, pattern, suite, somme, calcul.

<u>Énoncé</u>

Le dessin présente la construction des quatre premiers nombres pentagonaux.
Ces nombres pentagonaux sont obtenus en comptant les points des figures.
Ainsi, les premiers nombres pentagonaux sont : 1, 5, 12, 22, etc.

De la même façon, construire les quatre premiers nombres hexagonaux.
Le nombre 231 est le onzième nombre hexagonal.
Quel est le suivant ? Expliquer par un calcul.

Compétences : Chercher, représenter, raisonner, calculer.

Capacités : Construire une figure géométrique plane, s'engager dans une démarche scientifique, observer, émettre une conjecture, calculer une somme.	
Tâches de l'élève : Tracé d'une figure plane, raisonner par récurrence, calculer.	

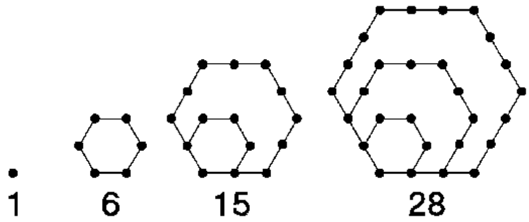
Éléments de correction et solution :

L'exemple pentagonal est donné pour questionner sur l'hexagonal, et on peut commencer depuis des trigones. Et en effet, on remarque plus facilement une évolution avec des nombres plus petits, comme le montre le tableau ci-dessous :

(Incrément : nombre de points rajoutés)

Trigones (Triangles)			Tétragones (Carrés)			Pentagones			Hexagones		
Nb poly	Incrément	Points	Nb poly	Incrément	Points	Nb poly	Incrément	Points	Nb poly	Incrément	Points
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	2	3	4	2	4	5	2	5	6
3	3	6	3	5	9	3	7	12	3	9	15
4	4	10	4	7	16	4	10	22	4	13	28
5	5	15	5	9	25	5	13	35	5	17	45

Voici les quatre premiers nombres hexagonaux :



Pour trouver les nombres hexagonaux suivants, il suffit d'appliquer l'algorithme de leur suite

Nb polygones	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Incrément	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57
Points	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276	325	378	435

Le douzième nombre hexagonal est 276.

Il y a de multiples façons de compter les points.

Barème proposé :

3 points pour la construction des quatre nombres hexagonaux
(1 point pour 1 et 6, 1 point pour 15, 1 point pour 18).
1 point pour le douzième nombre hexagonal.
1 point pour l'explication.

Prolongement pour le professeur :

Étude complète des différents nombres :

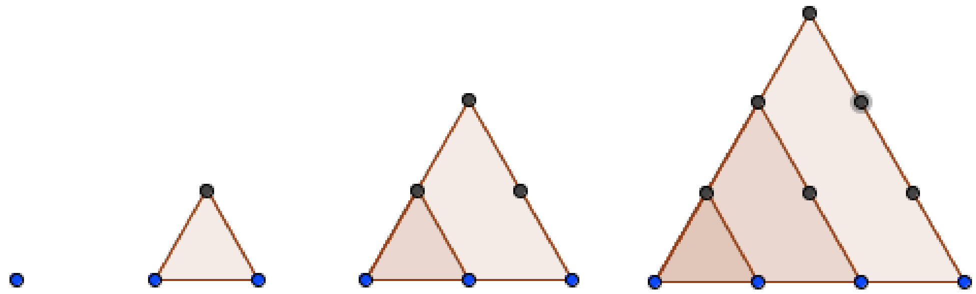
Nombres trigonaux ou triangulaires

Les nombres trigonaux ou triangulaires se définissent par la formule :

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ces nombres vérifient la relation de récurrence :

$$T_{n+1} = T_n + (n+1)$$



$T_1 = 1$ $T_2 = 1 + 1 + 1 = 3$ $T_3 = 3 + (2 + 1) = 6$ $T_4 = 6 + 3 + 1 = 10$

$= \frac{2 \times 3}{2} = 3$ $= \frac{3 \times 4}{2} = 6$ $= \frac{4 \times 5}{2} = 10$

Démonstration de la relation de récurrence :

$$T_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = T_n + (n+1)$$

Nombres tétragonaux ou carrés

Les nombres tétragonaux se définissent par la formule :

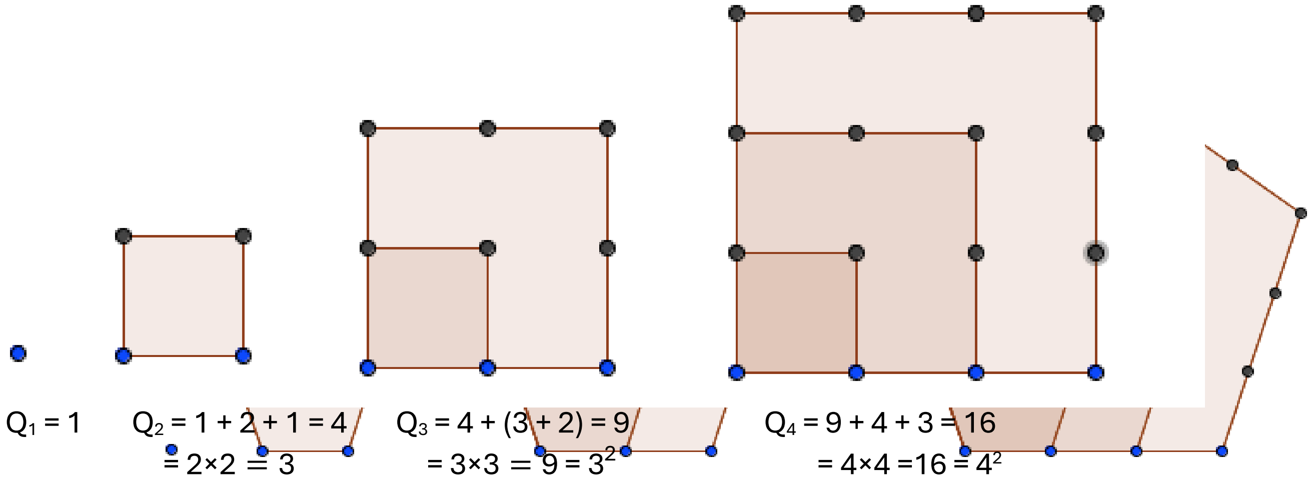
$$Q_n = n^2$$

Ces nombres vérifient la relation de récurrence :

$$Q_{n+1} = Q_n + (2n+1)$$

Démonstration de la relation de récurrence :

$$Q_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = Q_n + 2n + 1$$



$Q_1 = 1$ $Q_2 = 1 + 2 + 1 = 4$ $Q_3 = 4 + (3 + 2) = 9$ $Q_4 = 9 + 4 + 3 = 16$

$= 2\times 2 = 3$ $= 3\times 3 = 9 = 3^2$ $= 4\times 4 = 16 = 4^2$

Nombres pentagonaux

$P_1 = 1$ $P_2 = 1 + 2 + 1 + 1 = 5$ $P_3 = 5 + 3 + 2 + 2 = 12$ $Q_4 = 12 + 4 + 3 + 3 = 22$

$= 2\left(\frac{3\times 2-1}{}\right) = 5$ $= 3\left(\frac{3\times 3-1}{}\right) = 12$ $= 4\left(\frac{3\times 4-1}{}\right) = 22$

Les nombres pentagonaux se définissent par la formule :

$$P_n = n\frac{(3n-1)}{2}$$

Ces nombres vérifient la relation de récurrence :

$$P_{n+1} = P_n + (3n + 1)$$

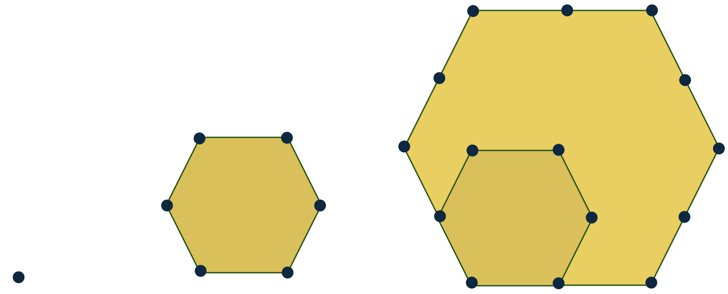
Démonstration de la relation de récurrence :

$$P_{n+1} = (n+1)\frac{3(n+1)-1}{2} = \frac{3(n+1)^2-(n+1)}{2} = \frac{3n^2+6n+3-n-1}{2} = \frac{3n^2-n+6n+2}{2} = \frac{3n^2-n}{2} + \frac{6n+2}{2}$$

$$= n\frac{(3n-1)}{2} + 3n + 1 = P_n + (3n+1)$$

Du point de vue géométrique, le passage du n-ième au (n + 1)-ième nombre pentagonal revient à ajouter exactement (3n+ 1) points.

Nombres hexagonaux



$H_1 = 1$ $\quad H_2 = 1 + 2 + 2 + 1 = 6$ $\quad H_3 = 6 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 15$

$= 2(2 \times 2 - 1) = 6$ $\quad = 3(2 \times 3 - 1) = 15$

Les nombres hexagonaux se définissent par la formule :

$$H_n = n(2n - 1)$$

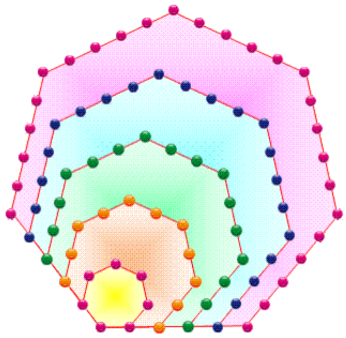
Ces nombres vérifient la relation de récurrence :

$$H_{n+1} = H_n + (4n + 1)$$

On obtient les résultats suivants :

Du point de vue géométrique, le passage du n-ième au (n + 1)-ième nombre hexagonal revient à ajouter exactement (4n+ 1) points.

Nombres heptagonaux



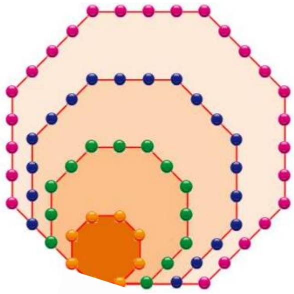
Les nombres heptagonaux se définissent par la formule :

$$S_n = n\frac{(5n - 3)}{2}$$

Ces nombres vérifient la relation de récurrence :

$$S_{n+1} = S_n + (5n + 1)$$

Nombres octogonaux



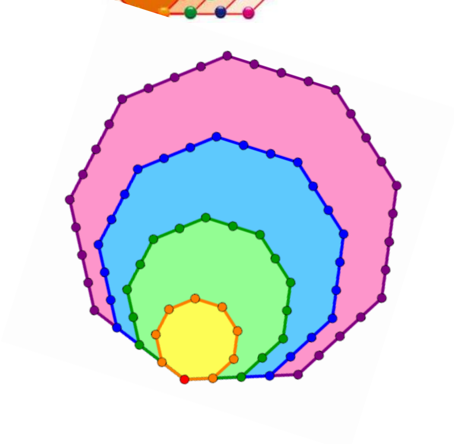
Les nombres octogonaux se définissent par la formule :

$$O_n = n(3n - 2)$$

Ces nombres vérifient la relation de récurrence :

$$O_{n+1} = O_n + (6n + 1)$$

Nombres ennéagonaux (ou nombres nonagonaux)



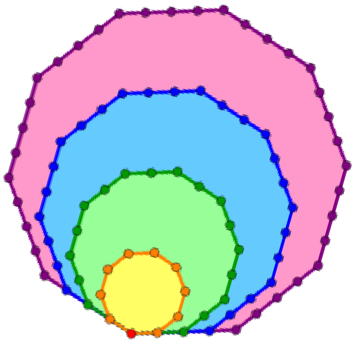
Les nombres ennéagonaux se définissent par la formule :

$$N_n = n\left(\frac{7n - 5}{2}\right)$$

Ces nombres vérifient la relation de récurrence :

$$N_{n+1} = N_n + (7n + 1)$$

Nombres décagonaux



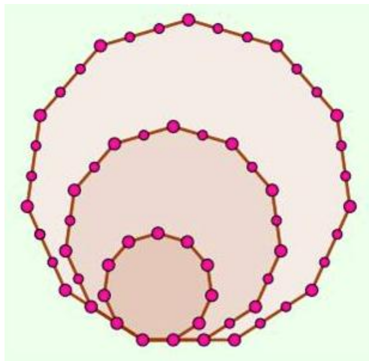
Les nombres décagonaux se définissent par la formule :

$$D_n = n(4n - 3)$$

Ces nombres vérifient la relation de récurrence :

$$D_{n+1} = D_n + (8n + 1)$$

Nombres hendécagonaux



Les nombres hendécagonaux se définissent par la formule :

$$H_n = n\left(\frac{9n - 7}{2}\right)$$

Ces nombres vérifient la relation de récurrence :

$$H_{n+1} = H_n + (9n + 1)$$

Nombres dodécagonaux

Les nombres dodécagonaux se définissent par la formule :

$$Z_n = n(5n - 4)$$

Ces nombres vérifient la relation de récurrence :

$$Z_{n+1} = Z_n + (10n + 1)$$

On peut poursuivre la construction des suites de tels nombres polygonaux.
On remarque :

Si le nombre des côtés (p) est pair, les nombres polygonaux se définissent par la formule :

$$Y_n(p) = n\left(\frac{p-2}{2} - \frac{p-4}{2}\right)$$

Ces nombres vérifient la relation de récurrence :

$$Y_{n+1}(p) = Y_n(p) + ((p - 2)n + 1)$$

Si le nombre des côtés (i) est impair, les nombres polygonaux se définissent par la formule :

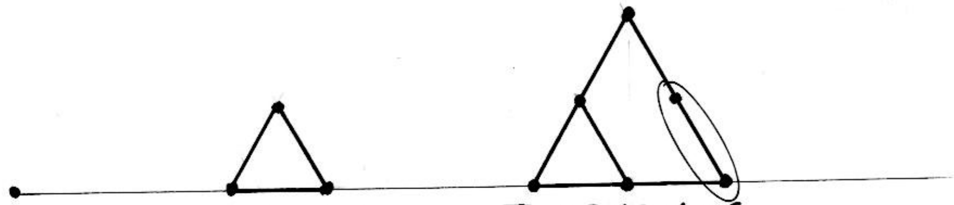
$$Y_n(i) = n\left(\frac{n(i-2) - (i-4)}{2}\right)$$

Ces nombres vérifient la relation de récurrence :

$$Y_{n+1}(i) = Y_n(i) + ((i - 2)n + 1)$$

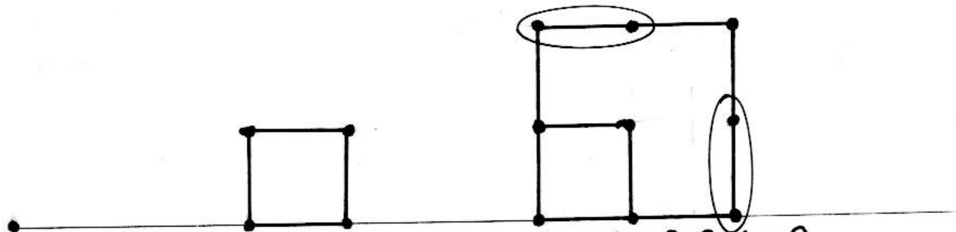
Autre façon de compter les incréments

NOMBRES TRIANGULAIRES $\boxed{T_n = \frac{n(n+1)}{2}}$ $\boxed{T_{n+1} = T_n + (n+1)}$



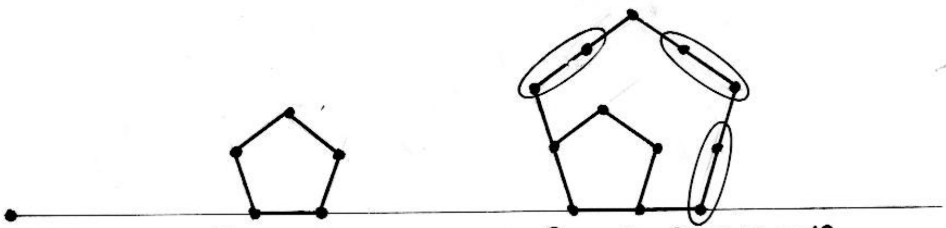
$T_1 = 1$ $T_2 = 1+1+1 = 3$ $T_3 = 3 + \underline{1} \times 2 + 1 = 6$

NOMBRES CARRES $\boxed{Q_n = n^2}$ $\boxed{Q_{n+1} = Q_n + (2n+1)}$



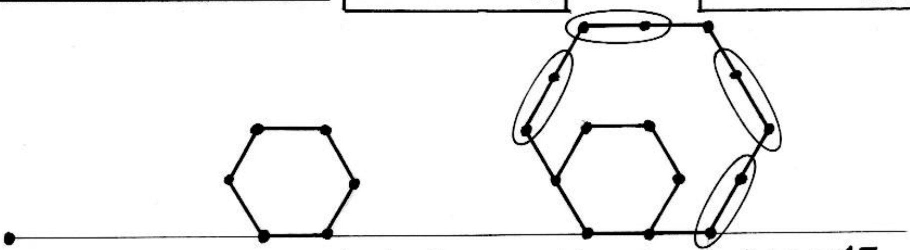
$Q_1 = 1$ $Q_2 = 1+2+1 = 4$ $Q_3 = 4 + \underline{2} \times 2 + 1 = 9$

NOMBRES PENTAGONAUX $\boxed{P_n = \frac{3n^2 - n}{2}}$ $\boxed{P_{n+1} = P_n + (3n+1)}$



$P_1 = 1$ $P_2 = 1+3+1 = 5$ $P_3 = 5 + \underline{3} \times 2 + 1 = 12$

NOMBRES HEXAGONAUX $\boxed{H_n = 2n^2 - n}$ $\boxed{H_{n+1} = H_n + (4n+1)}$



$H_1 = 1$ $H_2 = 1+4+1 = 6$ $H_3 = 6 + \underline{4} \times 2 + 1 = 15$

NOMBRES HEPTAGONAUX $\boxed{K_n = \frac{5n^2 - 3n}{2}}$ $\boxed{K_{n+1} = K_n + (5n+1)}$

NOMBRES OCTAGONAUX $\boxed{O_n = 3n^2 - 2n}$ $\boxed{O_{n+1} = O_n + (6n+1)}$

NOMBRES NONAGONAUX $\boxed{N_n = \frac{7n^2 - 5n}{2}}$ $\boxed{N_{n+1} = N_n + (7n+1)}$

NOMBRES DECAGONAUX $\boxed{D_n = 4n^2 - 3n}$ $\boxed{D_{n+1} = D_n + (8n+1)}$

NOMBRES PENTAGONAUX

Ils se définissent par la formule : $\boxed{P_n = \frac{3n^2-n}{2}}$ pour $n \geqslant 1$

On va démontrer que ces nombres vérifient la relation de récurrence : $\boxed{P_{n+1} = P_n + (3n+1)}$

Démonstration :

Appliquons la formule pour P_{n+1}

$$P_{n+1} = \frac{3(n+1)^2-(n+1)}{2} = \frac{3n^2+6n+3-n-1}{2} = \frac{3n^2+5n+2}{2}$$

Or : $\frac{3n^2+5n+2}{2} = \frac{3n^2-n}{2} + \frac{6n+2}{2} = \frac{3n^2-n}{2} + (3n+1)$

d'où : $P_{n+1} = P_n + (3n+1)$

Du point de vue géométrique, le passage du n-ième au (n+1)-ième nombre pentagonal revient à ajouter exactement 3n+1 points.

NOMBRES HEXAGONAUX

Ils se définissent par la formule : $\boxed{H_n = 2n^2 - n}$ pour $n \geqslant 1$

On va démontrer que ces nombres vérifient la relation de récurrence : $\boxed{H_{n+1} = H_n + (4n+1)}$

Démonstration :

Appliquons la formule pour H_{n+1}

$$H_{n+1} = 2(n+1)^2 - (n+1) = 2n^2 + 4n + 2 - n - 1 = 2n^2 + 3n + 1$$

Or : $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 - n + (4n+1)$

d'où : $H_{n+1} = H_n + (4n+1)$

Du point de vue géométrique, le passage du n-ième au (n+1)-ième nombre hexagonal revient à ajouter exactement 4n+1 points.

NOMBRES HEPTAGONAUX

Ils se définissent par la formule : $\boxed{K_n = \frac{5n^2-3n}{2}}$ pour $n \geqslant 1$

On va démontrer que ces nombres vérifient la relation de récurrence : $\boxed{K_{n+1} = K_n + (5n+1)}$

Démonstration :

Appliquons la formule pour K_{n+1}

$$K_{n+1} = \frac{5(n+1)^2 - 3(n+1)}{2} = \frac{5n^2+10n+5-3n-3}{2} = \frac{5n^2+7n+2}{2}$$

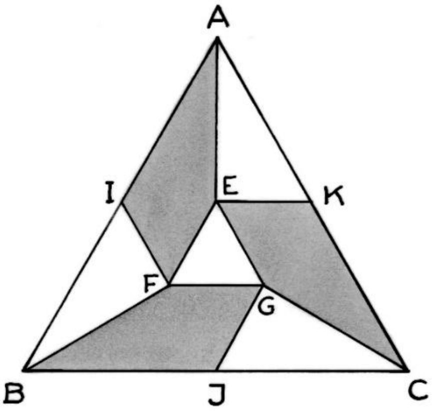
Or : $\frac{5n^2+7n+2}{2} = \frac{5n^2-3n}{2} + \frac{10n+2}{2} = \frac{5n^2-3n}{2} + (5n+1)$

d'où : $K_{n+1} = K_n + (5n+1)$

Du point de vue géométrique, le passage du n-ième au (n+1)-ième nombre heptagonal revient à ajouter exactement 5n+1 points.

Exercice 7 – *LOGO* – 7 points –
Thème : Grandeurs et mesures. Aires. **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Aire, triangle équilatéral, fraction, tracé, utilisation d'instruments de géométrie, règles, compas.

Énoncé



Voici le dessin d'un logo.
ABC est un triangle équilatéral.
I, J et K sont les milieux des côtés du triangle ABC.
E, F et G sont les milieux des côtés du triangle IJK.

Construire la figure ci-dessus.
Si l'aire du triangle ABC est 1 dm², quelle est l'aire de la partie grisée ?

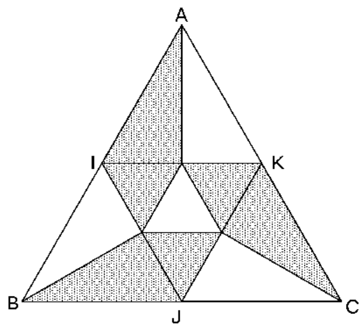
Compétences : Représenter, raisonner, calculer.	
Capacités : Construire une figure plane, utiliser les propriétés géométriques d'une figure pour calculer des grandeurs géométriques.	
Tâches de l'élève : Construire une figure plane, calculer une aire par découpage et réassemblage.	

Éléments de correction et solution :

Si le triangle ABC a une aire de 1 dm², chaque triangle rectangle grisé a une aire huit fois plus petite, soit 12,5 cm².
Et les petits triangles équilatéraux grisés sont seize fois plus petits que le grand triangle, soit 6,25 cm².
L'aire grisée sera de
$3 \times 12{,}5 + 3 \times 6{,}25 = 56{,}25$ cm²

L'aire grisée sera de 56,25 cm².
C'est un exercice que l'on peut aborder de multiples façons.

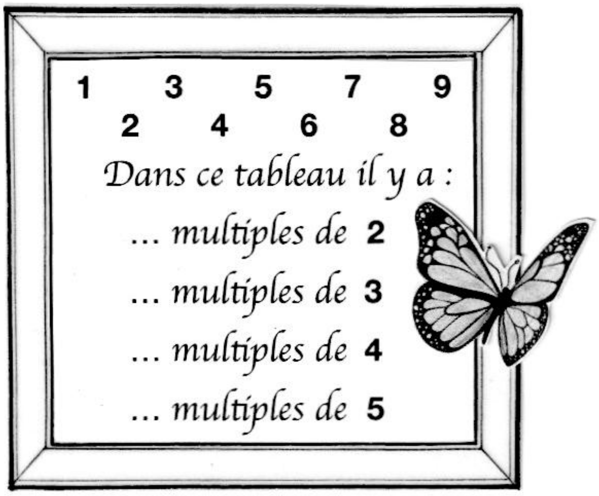
Remarque : on pourra traiter des notions de proportions à l'aide de cette figure.



Barème proposé :
3 points pour la construction de la figure. 4 points pour l'aire grisée.

Exercice 8 – *MULTIPORTRAIT* – 5 points –
Thème : Nombres et calculs **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Nombres entiers, multiple, arithmétique.

Énoncé

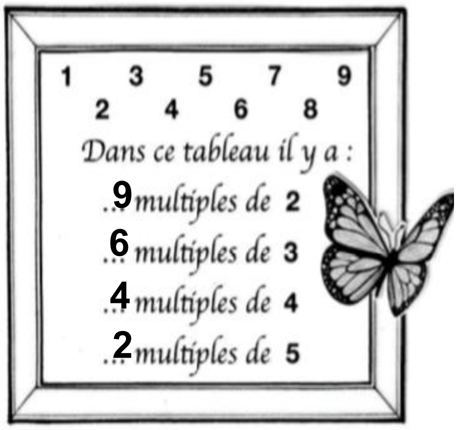


Trouver des nombres à placer sur les quatre emplacements en pointillés pour que toutes les affirmations soient vraies. Compléter le tableau et le coller sur la feuille réponse.

Compétences : Chercher, raisonner.
Capacités : S'engager dans une démarche scientifique, chercher des exemples, tester.
Tâches de l'élève : Raisonner par essai-réajustement, respect d'une contrainte, grille.

Éléments de correction et solution :

Par essai-erreur on trouve rapidement l'une des deux solutions :



Barème proposé :

5 points pour une solution correcte.
Pour valoriser les traces de recherche : à l'appréciation du correcteur.

Voici un programme en Python qui permet de résoudre cet exercice :

```python
def autoref():
    nb=0
    for i in  range (1,11):
        for j in  range (1,11):
            for k in  range (1,11):
                for l in  range (1,11):
                    L=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,2,3,4,5]+[i,j,k,l]
                    d=1
                    for m in range(9,13):
                        c=0
                        for n in range(17):
                            if L[n]%L[m]==0:
                                c+=1
                        if c!=L[m+4]:
                            d=0
                    if d==1:
                        print([i,j,k,l])
                        nb+=1
    return nb
```

Exercice 9 – *CARTE CACHÉE !* – 7 points –
Thème : Nombres et calculs. **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Nombre entier, décomposition d'un nombre suivant ses rangs (décomposition décimale), calcul littéral, additions, équations.

Énoncé

Gabin écrit trois nombres entiers à deux chiffres sur trois cartes.
Il note ensuite, sur une feuille de papier, tous les nombres à six chiffres qu'il peut former en posant ces trois cartes les unes à côté des autres.
La somme de tous les nombres que Gabin a réussi à former avec les trois cartes est égale à 1 434 342.
Sur l'une des trois cartes, il a écrit le nombre 12 et sur une autre le nombre 25.
Il cache la troisième carte.

Déterminer le nombre inscrit sur la troisième carte.
Expliquer votre démarche.

Compétences : Calculer, modéliser.
Capacités : Produire et réutiliser plusieurs représentations d'un nombre, calculer en utilisant le langage algébrique, produire et résoudre une équation.
Tâches de l'élève : Poser une addition, décomposer un nombre suivant ses rangs, mettre en équation, résoudre une équation.

Éléments de correction et solution :

Si on appelle le nombre caché 10a+b et qu'on cherche toutes les possibilités de disposer les cartes, on obtient la situation du tableau ci-contre. Les sommes sont les mêmes dans chaque colonne, mais elles ne représentent pas les mêmes nombres, les puissances de 10 doivent être respectées.

12	10a+b	25
12	25	10a+b
10a+b	12	25
10a+b	25	12
25	12	10a+b
25	10a+b	12
20a+2b+74	20a+2b+74	20a+2b+74

Ainsi la somme totale est de

202020 x a + 20202 x b + 747 474 qui permet d'écrire l'équation suivante :

202020 x a + 20202 x b + 747 474 = 1 434 342

202020 x a + 20202 x b = 686 868

101010 x a + 10101 x b = 343 434, ce qui permet de voir que a = 3 et b = 4 (on aurait même pu le faire sur la seule colonne des unités).

Le nombre caché est 34. C'est la seule solution.

Autre rédaction de solution possible :

12 ab 25
12 25 ab
25 ab 12
25 12 ab
ab 12 25
ab 25 12

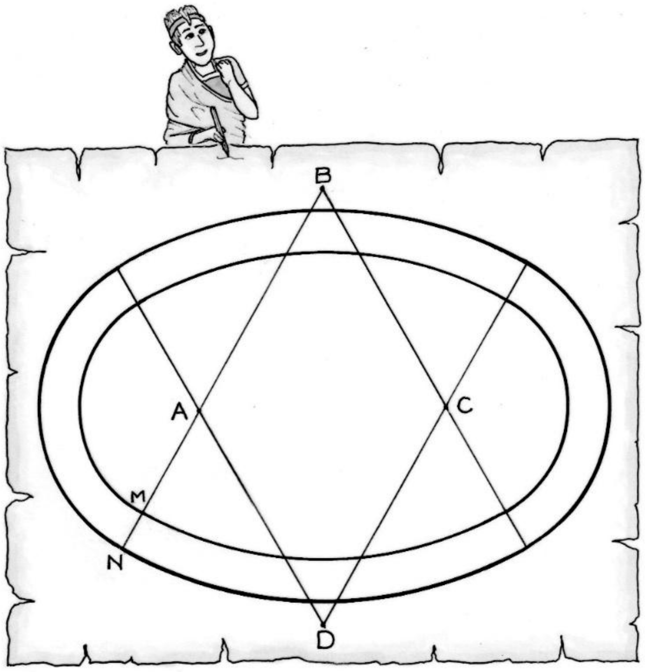
Total : (74 + 2ab)(10 000 + 100 + 1) = (74 + 2ab)(10 101) = 1 434 342
D'où : 74 + 2ab = 142 donc **ab =** 68 / 2 **= 34**

Barème proposé :

1 point pour « Gabin peut écrire six nombres ».
6 points pour la solution « 34 » et l'explication.
Pour valoriser les traces de recherche : à l'appréciation du correcteur.
Une solution qui a été trouvée par essai-erreur est acceptée.

Exercice 10 – *ARENA* – 10 points –
Thème : Géométrie, configuration du plan. Grandeurs et mesures, calculs de longueurs. **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Longueur d'un cercle, longueur d'un arc de cercle, angle dans le triangle équilatéral, tracé, utilisation d'instruments de géométrie, compas, règle, calcul.

Énoncé



Voici le plan des arènes romaines ovales.
Les triangles ABC et ACD sont équilatéraux.
Le contour de l'ovale intérieur de l'arène est formé de quatre arcs de cercles de centres A, B, C et D.
Pour former l'ovale extérieur, on augmente le rayon de chacun des arcs de cercle construits précédemment. Ainsi, l'écart entre les deux ovales est constant.

Réaliser un plan de construction avec AB = 6 cm, AM = 3 cm et AN = 4 cm.
Calculer la différence de longueur entre les deux ovales.

Compétences : Représenter, calculer.
Capacités : Construire une figure géométrique plane, calculer.
Tâches de l'élève : Tracer une figure plane, calculer.

Éléments de correction et solution :

Pour l'ovale intérieur

Les arcs de cercle centrés en A et C totalisent 240°, leur longueur totale vaut :

$\frac{2}{3} \times 2\pi \times 3 = 4\pi$

Les arcs de cercle centrés en B et D totalisent 120°, leur longueur totale vaut :

$\frac{1}{3} \times 2\pi \times 9 = 6\pi$

La longueur de l'ovale intérieur est de :

$4\pi + 6\pi = 10\pi \approx 31{,}4\ cm$

La longueur de l'ovale intérieur est 10 π soit environ 31,4 cm

Pour l'ovale extérieur

Les arcs de cercle centrés en A et C totalisent 240°, leur longueur totale vaut :

$\frac{2}{3} \times 2\pi \times 4 = \frac{16}{3}\pi$

Les arcs de cercle centrés en B et D totalisent 120°, leur longueur totale vaut :

$\frac{1}{3} \times 2\pi \times 10 = \frac{20}{3}\pi$

La longueur de l'ovale extérieur est de :

$\frac{16}{3}\pi + \frac{20}{3}\pi = \frac{36}{3}\pi = 12\pi \approx 37{,}7\ cm$

La longueur de l'ovale extérieur est 12 π soit environ 37,7 cm

Différence de longueur entre les deux ovales :

$12\pi - 10\,\pi = 2\pi \approx$ 6,3 cm.

La différence de longueur entre les deux ovales est de 2 π soit environ 6,3 cm

Autre question possible :

Quelle est l'aire du couloir entre les deux ovales ?

Barème proposé :

4 points pour la construction, dont 1 point pour le soin.
2,5 points pour la longueur de l'ovale intérieur.
2,5 points pour la longueur de l'ovale extérieur.
1 point pour la différence.

Exercice 11 – *3D* – 5 points – seconde
Thème : Organisation et gestion de données. Probabilité. **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Probabilité, dénombrement, chance, arbre des possibles.

Énoncé

Lorsqu'on lance simultanément trois dés à six faces et qu'on additionne les résultats obtenus, on fait apparaître des nombres compris entre 3 et 18, mais deux de ces nombres ont plus de chances d'apparaître.

Sur quel(s) nombre(s) parieriez-vous ? Justifier votre choix.

Compétences : Modéliser, calculer, communiquer.
Capacités : Traduire en langage mathématique une situation réelle, calculer les probabilités, expliquer une démarche.
Tâches de l'élève : Modéliser, dénombrer, rechercher tous les résultats possibles (exhaustivité des cas), calculer des probabilités.

Éléments de correction et solution :

Il y a 216 (= 6^3) lancers possibles. Les triplets de la forme (a, a, a) n'apparaissent chacun qu'une fois.
Les triplets (a, a, b) apparaissent trois fois par permutation.
Enfin les triplets (a, b, c) apparaissent six fois par permutation.

Présentons tous les lancers possibles :

Somme	Points	Nombre de possibilités	Points	Nombre de possibilités	Points	Nombre de possibilités	Points	Nombre de possibilités	Points	Nombre de possibilités	Points	Nombre de possibilités	Total des possibilités
3	111	*1*											1
4	112	*3*											3
5	113	*3*	122	*3*									6
6	114	*3*	123	*6*	222	*1*							10
7	115	*3*	124	*6*	133	*3*	223	*3*					15
8	116	*3*	125	*6*	134	*6*	224	*3*	233	3			21
9	126	*6*	135	*6*	144	*3*	225	*3*	234	6	*333*	1	25
10	136	*6*	145	*6*	226	*3*	235	*6*	244	3	*334*	3	27
11	146	*6*	155	*3*	236	*6*	245	*6*	335	3	*344*	3	27
12	156	*6*	246	*6*	255	*3*	336	*3*	345	6	*444*	1	25
13	166	*3*	256	*6*	346	*6*	355	*3*	445	3			21
14	266	*3*	356	*6*	446	*3*	455	*3*					15
15	366	*3*	456	*6*	555	*1*							10
16	466	*3*	556	*3*									6
17	566	*3*											3
18	666	*1*											1

Il faut parier sur les nombres 10 et 11.

Barème proposé :

3 points pour les deux nombres 10 et 11 (1,5 points pour chaque nombre).
2 points pour l'explication.

Exercice 12 – *FAUCHÉS COMME LES BLÉS* – 7 points – seconde
Thème : Nombres et calculs, logique. Équations **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Logique, fractions, équations, calcul littéral, proportionnalité.

Énoncé

Titus a deux prés, un grand et un petit. La surface du grand pré est le double de celle du petit.
Ses amis se proposent de les faucher pour lui. Ils prennent rendez-vous le matin et commencent tous à faucher le grand pré. Ils travaillent jusqu'à midi, font une pause et reprennent l'après-midi. Alors, la moitié d'entre eux va dans le petit pré et l'autre moitié reste dans le grand. Tous travaillent bien et à la même vitesse. À la fin de la journée de travail, le grand pré est fauché mais il reste à finir le petit.
Le lendemain, en travaillant toute la journée, Titus finit de faucher seul le petit pré.

Combien d'amis sont venus aider Titus ? Justifier.

Compétences : Chercher, modéliser, raisonner, calculer, communiquer.
Capacités : Extraire des informations utiles et les organiser, reconnaître une situation de proportionnalité, traduire en langage mathématique une situation réelle, produire et résoudre une équation, calculer en utilisant le langage algébrique, expliquer sa démarche.
Tâches de l'élève : Modéliser, mettre en équation, raisonner avec un schéma, rédiger une démarche.

Éléments de correction et solution :

Notons
- ✓ n le nombre d'amis
- ✓ f la surface de fauche par individu par demi-journée
- ✓ s la surface du petit pré
- ✓ 2s la surface du grand pré

Mise en équation du problème :
Surface fauchée du grand pré :
$$n \times f + \frac{n \times f}{2} = 2s$$

Surface fauchée du petit pré :

$$\frac{n \times f}{2} + 2f = s$$

d'où :

$n \times f + \dfrac{n \times f}{2} = 2 \times \left(\dfrac{n \times f}{2} + 2f\right)$ et en simplifiant l'équation on obtient :

$n + \dfrac{n}{2} = \dfrac{2n}{2} + 4$ et finalement $n = 8$

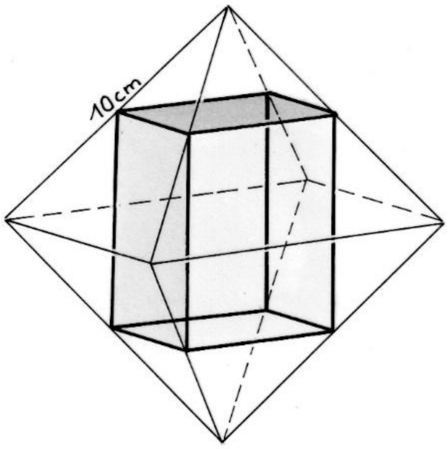
Titus avait huit amis.

Barème proposé :

7 points pour la solution correcte et l'explication.
Pour valoriser les traces de recherche : à l'appréciation du correcteur.
Une solution qui a été trouvée par essai-erreur est acceptée.

Exercice 13 – *PAVÉ DE BONNES DIMENSIONS* – 10 points – secondes
Thème : Géométrie, configuration de l'espace. Grandeur et mesure, calcul de longueurs et de volumes. **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Vision dans l'espace, pyramide, pavé droit, triangle isocèle et hauteur, théorème de Pythagore, volume d'une pyramide et d'un pavé droit, pourcentage.

<u>Énoncé</u>



Un pavé est placé dans un octaèdre régulier de 10 cm d'arête. Les sommets du pavé sont au milieu des arêtes.

Calculer les dimensions du pavé. Expliquer.
Calculer le pourcentage du volume de l'octaèdre occupé par le pavé.

Compétences : Calculer, représenter, raisonner.
Capacités : Analyser un problème de géométrie de l'espace et se ramener dans le plan, utiliser des propriétés géométriques pour calculer des grandeurs géométriques, calculer de manière exacte.
Tâches de l'élève : Utiliser le théorème de Pythagore pour calculer une longueur, calculer le volume d'un pavé droit et d'une pyramide, calculer un pourcentage.

<u>Éléments de correction et solution :</u>

À l'aide de Pythagore, la hauteur d'une face de l'octaèdre donne :

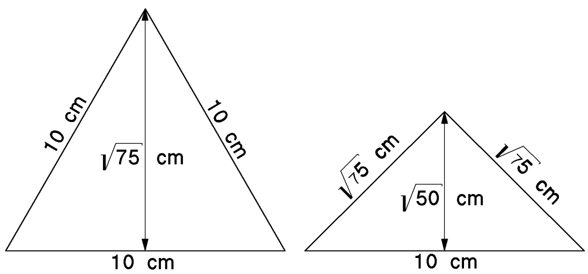
$h_o{}^2 = 10^2 - 5^2 = 75$

$h_o = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

De même pour la hauteur d'une pyramide on obtient :

$h_p{}^2 = 75 - 5^2 = 50$

$h_p = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$



Avec les mesures ainsi trouvées, on peut calculer le volume de l'octaèdre, formé de deux pyramides :
Volume de l'octaèdre :

$2 \times \frac{10^2 \times 5\sqrt{2}}{3} = \frac{1000\sqrt{2}}{3} \approx 471{,}4$ cm^3

Les sommets du pavé se trouvant sur les milieux des arêtes, ses faces horizontales ont 5 cm de côté. Et puisque le pavé arrive à mi-hauteur de la pyramide, la moitié supérieure du pavé a une hauteur égale à la moitié de $5\sqrt{2}$ cm, donc la hauteur totale du pavé est de $5\sqrt{2}$ cm.

Volume du pavé :

$5 \times 5 \times 5\sqrt{2} = 125\sqrt{2} \approx 176{,}8$ cm^3

Le quotient du volume du pavé par celui de l'octaèdre est de

$$\frac{125\sqrt{2}}{\frac{1000\sqrt{2}}{3}} = \frac{375}{1000} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

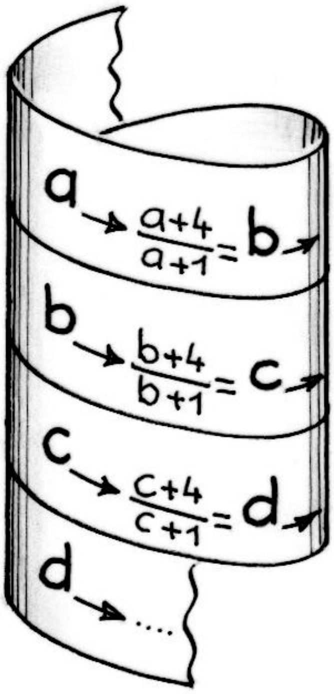
Le quotient du volume du pavé par celui de l'octaèdre est de $3/8$, soit 0,375.
Le pourcentage du volume de l'octaèdre occupé par le pavé est de 37,5%.

Barème proposé :

3 points pour la hauteur d'une pyramide.
4 points pour les dimensions du pavé avec l'explication.
1 point pour le volume de l'octaèdre.
1 point pour le volume du pavé.
1 point pour le pourcentage.

Exercice 13 – *CONVERGENCE* – 10 points – PRO
Thème : Nombres et calculs Tableur. **Principaux éléments mathématiques travaillés :** Tableur, suite homographique, limite.

Énoncé



Voici un programme de calcul.
Choisir un nombre de départ entier et positif.

1. Ajouter 4 à ce nombre.
2. Ajouter 1 au nombre de départ.
3. Diviser le résultat de l'étape 1 par le résultat de l'étape 2.
4. Recommencer en 1 avec le nombre obtenu.

Tester ce programme en choisissant différents nombres de départ.
Que remarque-t-on ?

L'usage du tableur est fortement conseillé. Présenter le tableur de vos recherches à votre professeur.

Compétences : Chercher, calculer, communiquer.
Capacités : Utiliser un tableur pour résoudre un problème algébrique, s'engager dans une démarche scientifique, tester.
Tâches de l'élève : Utiliser un tableur, méthode par essais successifs, calculer.

Éléments de correction et solution :

	n	n+4	n+1	n+4/n+1
a	2	6	3	2
b	2	6	3	2
c	2	6	3	2
d	2	6	3	2
e	2	6	3	2
f	2	6	3	2
g	2	6	3	2
h	2	6	3	2

	n	n+4	n+1	n+4/n+1
a	3	7	4	1,75
b	1,75	5,75	2,75	2,09090909
c	2,09090909	6,09090909	3,09090909	1,97058824
d	1,97058824	5,97058824	2,97058824	2,00990099
e	2,00990099	6,00990099	3,00990099	1,99671053
f	1,99671053	5,99671053	2,99671053	2,00109769
g	2,00109769	6,00109769	3,00109769	1,99963424
h	1,99963424	5,99963424	2,99963424	2,00012194
i	2,00012194	6,00012194	3,00012194	1,99995936
j	1,99995936	5,99995936	2,99995936	2,00001355
k	2,00001355	6,00001355	3,00001355	1,99999548
k	1,99999548	5,99999548	2,99999548	2,00000151
l	2,00000151	6,00000151	3,00000151	1,9999995
m	1,9999995	5,9999995	2,9999995	2,00000017
n	2,00000017	6,00000017	3,00000017	1,99999994

	n	n+4	n+1	n+4/n+1
a	4	8	5	1,6
b	1,6	5,6	2,6	2,15384615
c	2,15384615	6,15384615	3,15384615	1,95121951
d	1,95121951	5,95121951	2,95121951	2,01652893
e	2,01652893	6,01652893	3,01652893	1,99452055
f	1,99452055	5,99452055	2,99452055	2,00182983
g	2,00182983	6,00182983	3,00182983	1,99939043
h	1,99939043	5,99939043	2,99939043	2,00020323
i	2,00020323	6,00020323	3,00020323	1,99993226
j	1,99993226	5,99993226	2,99993226	2,00002258
k	2,00002258	6,00002258	3,00002258	1,99999247
k	1,99999247	5,99999247	2,99999247	2,00000251
l	2,00000251	6,00000251	3,00000251	1,99999916
m	1,99999916	5,99999916	2,99999916	2,00000028
n	2,00000028	6,00000028	3,00000028	1,99999991

	n	n+4	n+1	n+4/n+1
a	5	9	6	1,5
b	1,5	5,5	2,5	2,2
c	2,2	6,2	3,2	1,9375
d	1,9375	5,9375	2,9375	2,0212766
e	2,0212766	6,0212766	3,0212766	1,99295775
f	1,99295775	5,99295775	2,99295775	2,00235294
g	2,00235294	6,00235294	3,00235294	1,9992163
h	1,9992163	5,9992163	2,9992163	2,0002613
i	2,0002613	6,0002613	3,0002613	1,99991291
j	1,99991291	5,99991291	2,99991291	2,00002903
k	2,00002903	6,00002903	3,00002903	1,99999032
k	1,99999032	5,99999032	2,99999032	2,00000323
l	2,00000323	6,00000323	3,00000323	1,99999892
m	1,99999892	5,99999892	2,99999892	2,00000036
n	2,00000036	6,00000036	3,00000036	1,99999988

	n	n+4	n+1	n+4/n+1
a	20	24	21	1,14285714
b	1,14285714	5,14285714	2,14285714	2,4
c	2,4	6,4	3,4	1,88235294
d	1,88235294	5,88235294	2,88235294	2,04081633
e	2,04081633	6,04081633	3,04081633	1,98657718
f	1,98657718	5,98657718	2,98657718	2,00449438
g	2,00449438	6,00449438	3,00449438	1,99850411
h	1,99850411	5,99850411	2,99850411	2,00049888
i	2,00049888	6,00049888	3,00049888	1,99983374
j	1,99983374	5,99983374	2,99983374	2,00005542
k	2,00005542	6,00005542	3,00005542	1,99998153
k	1,99998153	5,99998153	2,99998153	2,00000616
l	2,00000616	6,00000616	3,00000616	1,99999795
m	1,99999795	5,99999795	2,99999795	2,00000068
n	2,00000068	6,00000068	3,00000068	1,99999977

	n	n+4	n+1	n+4/n+1
a	50	54	51	1,05882353
b	1,05882353	5,05882353	2,05882353	2,45714286
c	2,45714286	6,45714286	3,45714286	1,8677686
d	1,8677686	5,8677686	2,8677686	2,04610951
e	2,04610951	6,04610951	3,04610951	1,98486282
f	1,98486282	5,98486282	2,98486282	2,00507132
g	2,00507132	6,00507132	3,00507132	1,99831241
h	1,99831241	5,99831241	2,99831241	2,00056285
i	2,00056285	6,00056285	3,00056285	1,99981242
j	1,99981242	5,99981242	2,99981242	2,00006253
k	2,00006253	6,00006253	3,00006253	1,99997916
k	1,99997916	5,99997916	2,99997916	2,00000695
l	2,00000695	6,00000695	3,00000695	1,99999768
m	1,99999768	5,99999768	2,99999768	2,00000077
n	2,00000077	6,00000077	3,00000077	1,99999974

On remarque qu'au bout d'un certain nombre d'itérations, on arrive à un nombre très proche de 2.

Commentaire :
À un niveau Terminale Spé maths, on pourra traiter la convergence de la suite qui a pour limite 2.

Barème proposé :

À l'appréciation du correcteur.